Übungen zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 Überprüfen Sie, ob sich die folgenden Geraden / Ebenen schneiden. Falls ja, geben Sie den Schnittpunkt bzw. die Schnittgerade an.

a) $\vec{g_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\vec{g_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $E: \ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18; \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $E_1: \ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1; \quad E_2: \ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

Aufgabe 6.2 Liegen die Punkte (1|3|-6) und (5|-5|4) auf folgender Ebene?

$$E: \quad 2x_1 + x_2 - x_3 \ = \ 1$$

Aufgabe 6.3 Gegeben Sei die Ellipse $2x^2 + 5y^2 - 20x + 49 = 0$ in der x/y-Ebene. Schneidet sie folgende Ebenen und wenn ja, in welchen Punkten?

a) $\vec{E} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $E: \quad x + 2z \ = \ 5$

Aufgabe 6.4 Wiederholung: Gegeben Sei das skalare Potential der Erdanziehungskraft: $\Phi(r) \ = \ -G\frac{M_{Erde}}{r}$.

a) Berechnen Sie die ersten beiden Taylorpolynome an der Stelle $r \ = \ r_e$, dem Radius der Erde.

b) Ersetzen Sie jetzt $(r - r_e)$ durch z und $G\frac{M_{Erde}}{{r_e}^2}$ durch g. Außerdem können Sie die Konstante weg lassen, da ein Potential immer eine frei wählbare Konstante hat. Wenn Sie richtig gerechnet haben, erhalten Sie folgende Näherungsformel für das Gravitationspotential in der Nähe der Erdoberfläche:

$$\Phi \ \approx \ gz - \frac{g}{r_e}z^2$$

c) Berechnen Sie hieraus die wirkende Beschleunigung $\vec{a} \ = \ -\mathrm{grad}(\Phi)$.

d) Zeigen Sie explizit, dass das Kraftfeld Wirbelfrei ist, d.h. $\mathrm{rot}(\vec{a}) \ = \ 0$.