

Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 4 zum Wochenende

Aufgabe 4.1 Berechnen Sie folgende komplexe Ausdrücke

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|---|
| a) $(i+4) + (2i-3) = 1+3i$ | e) $6 \cdot (12-3i) = 72-18i$ | i) $\frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$ |
| b) $(-i+5) + (5-i) = 10$ | f) $(4i+3) \cdot (4i-3) = -25$ | j) $\frac{5}{3i+4} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ |
| c) $(26-14i) - (16+4i) = 10-10i$ | g) $(5i+3) \cdot (4i+1) = -17-17i$ | k) $\frac{52+13i}{5-i} = \frac{19}{2} + \frac{9}{2}i$ |
| d) $3i \cdot (2-i) = 3+6i$ | h) $(7-2i) \cdot (3i+5) = 41+11i$ | l) $\left(\frac{1}{2i}\right)^3 = \frac{1}{8}i$ |

Aufgabe 4.2 Es sollen alle Lösungen folgender komplexer Gleichungen gefunden werden. Zeichnen Sie diese in die komplexe Ebene ein.

- | | |
|--|---|
| a) $z^2 + z(-2-2i) - 2i + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$z = -i \vee z = 2+3i$ | d) $z + 2i = \sqrt{-4} \Leftrightarrow z = \{0; -4i\}$ |
| b) $z^2 - (2+i)z + i = -1 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = 1+i$ | e) $z^4 = e^i \Leftrightarrow$
$z = \{e^{\frac{1}{4}i}; e^{(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2})i}; e^{(\frac{1}{4}+\pi)i}; e^{(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\pi)i}\}$ |
| c) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{1+i} \Leftrightarrow z = 2^{-\frac{1}{6}}\{e^{\frac{\pi}{12}i}; e^{\frac{5}{12}\pi i}; e^{\frac{9}{12}\pi i}\}$ | f) $z = e^{2+\pi i} \Leftrightarrow -e^2 \approx -7,3891$ |

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie mithilfe der Logarithmengesetze:

- | | | |
|------------------------|-----------------------------------|---|
| a) $\log(100) = 2$ | c) $\frac{\ln(100)}{\ln(10)} = 2$ | e) $\log(5x) + \log(2x) = 1 + 2\log(x)$ |
| b) $\text{lb}(32) = 5$ | d) $\log(54d) - \log(0,54d) = 2$ | f) $\log_9(3) + \log_{81}(9) = 1$ |

Aufgabe 4.4 Bestimmen Sie das Taylorpolynom von $\cos(x)$ im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und beweisen Sie so, dass der Cosinus ein um 90° verschobener Sinus ist.

Es ist $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\cos''(x) = -\cos(x)$, $\cos'''(x) = \sin(x)$, $\cos^{(4)}(x) = \cos(x)$, ...
Weiterhin ist $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Damit sind alle geraden Ableitungen an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ gleich 0 und die Ungeraden Ableitungen alternieren zwischen +1 und -1. Für das Taylorpolynom von $\cos(x)$ an der selben Stelle ergibt sich also:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{(n)}(\frac{\pi}{2})}{n!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}$$

Für den Sinus an der Stelle π ergibt sich analog:

$\sin(\pi) = 0$, $\sin'(\pi) = \cos(\pi) = -1$, $\sin''(\pi) = -\sin(\pi) = 0$, $\sin'''(\pi) = -\cos(\pi) = 1$,
 $\sin^{(4)}(\pi) = \sin(\pi) = 0$, ... Damit ist

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(\pi)}{n!} (x-\pi)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}$$

Aufgabe 4.5 Berechnen Sie:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\frac{d}{dx} e^{x^2} = e^{x^2} \cdot 2x$ | b) $\frac{d}{dx} \ln(\tan(x)), 0 < x < \frac{\pi}{2}$
$= \cotan(x) + \tan(x)$ | c) $\int (n+1)\cos(x)^n \cdot \sin(x) dx$
$= \cos(x)^{n+1}$ |
|--|--|--|