# Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## Sommersemester 2014 - Übungsblatt 8

**Aufgabe 8.1** Gegeben sind folgende Vektoren in kartesischen Koordinaten. Wandeln Sie diese um in Polar- bzw. Zylinder und Kugelkoordinaten.

a) $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} \sqrt{12} \\ \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} 20 \\ \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{4} \\ \approx 0,9553 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 \\ egal \\ 0 \end{bmatrix}$

**Aufgabe 8.2** Integrieren Sie:

a) $\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1} x^2 dx dy = \frac{2}{3}$

b) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=y_0}^{y_1}\int_{z=z_0}^{z_1} e^{az} dz dy dx = \frac{y_1-y_0}{a}\cdot(e^{az_1}-e^{az_0})$

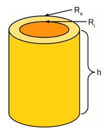
c) $\int_{x=0}^{2}\int_{y=x-1}^{3x} x^2 dy dx = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$

d) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2x}\int_{z=0}^{x+y} dz dy dx = \frac{4}{3}$

Warum müssen Sie bei den Aufgaben c) und d) die Reihenfolge beachten?
Die Reihenfolge muss beachtet werden weil die Grenzen des inneren Integrals von der Variable des äußeren Integrals abhängen.

**Aufgabe 8.3** Berechnen Sie das Volumen eines Zylinderrings mit dem inneren Radius $R_i$, dem äußeren Radius $R_a$ und der Höhe $h$

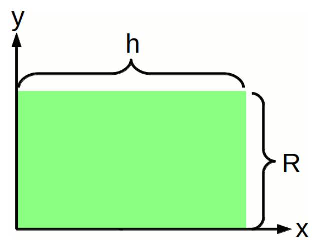
$$V = \int_{\rho=R_i}^{R_a}\int_{z=0}^{h}\int_{\phi=0}^{2\pi} \rho \; d\phi \; dz \; d\rho = \pi h\left({R_a}^2 - {R_i}^2\right)$$




**Aufgabe 8.4** Ein Rechteck der Länge h und der Breite R rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Zylinder.

a) Berechnen Sie das Volumen des Zylinders durch geschickte Integration.

$$V = \int_{\rho=0}^{R}\int_{z=0}^{h}\int_{\phi=0}^{2\pi} \rho \; d\phi \; dz \; d\rho = \pi h R^2$$




b) Berechnen Sie das Volumen des Zylinders mithilfe der Guldinsche Regel. Wie man leicht erkennt, liegt der Schwerpunkt bei $S = \frac{R}{2}$. Die Fläche ist $A = h \cdot R$. Damit ergibt sich für das Volumen $V = 2\pi S h = \pi h R^2$.

**Aufgabe 8.5** Beweisen Sie die 2. Guldinsche Regel mithilfe der Definition des Schwerpunktes:

$$S = \frac{1}{A}\cdot\int_A \rho \; dz \; d\rho$$

Sei $f(\rho;z)$ eine Funktion, welche die aufspannende Fläche beschreibt, d.h. $f(\rho;z) = 1$, wenn $(\rho|z)$ ein Punkt auf der Fläche ist, ansonsten 0. Dann lässt sich das Volumen des Rotationskörpers wie folgt berechnen:

$$V = \int_V dV = \int_\rho\int_z\int_{\phi=0}^{2\pi} f(\rho;z)\cdot\rho \; d\phi \; dz \; d\rho = 2\pi\cdot\int_\rho\int_z f(\rho;z)\cdot\rho \; dz \; d\rho = 2\pi\cdot\int_A \rho \; dz \; d\rho = 2\pi S\cdot A$$