Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 4 zum Wochenende

Aufgabe 4.1 Berechnen Sie folgende komplexe Ausdrücke

a) $(i+4)+(2i-3) = 1+3i$

b) $(-i+5)+(5-i) = 10$

c) $(26-14i)-(16+4i) = 10-10i$

d) $3i\cdot(2-i) = 3+6i$

e) $6\cdot(12-3i) = 72-18i$

f) $(4i+3)\cdot(4i-3) = -25$

g) $(5i+3)\cdot(4i+1) = -17-17i$

h) $(7-2i)\cdot(3i+5) = 41+11i$

i) $\frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$

j) $\frac{5}{3i+4} = \frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

k) $\frac{52+13i}{5-i} = \frac{19}{2}+\frac{9}{2}i$

l) $\left(\frac{1}{2i}\right)^3 = \frac{1}{8}i$

Aufgabe 4.2 Es sollen alle Lösungen folgender komplexer Gleichungen gefunden werden. Zeichnen Sie diese in die komplexe Ebene ein.

a) $z^2+z(-2-2i)-2i+3 = 0 \iff$
$z = -i \quad\vee\quad z = 2+3i$

b) $z^2-(2+i)z+i = -1 \iff z = 1 \quad\vee\quad z = 1+i$

c) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{1+i} \iff z = 2^{-\frac{1}{6}}\{e^{\frac{\pi}{12}i};\ e^{\frac{5}{12}\pi i};\ e^{\frac{9}{12}\pi i}\}$

d) $z+2i = \sqrt{-4} \iff z = \{0;\ -4i\}$

e) $z^4 = e^i \iff$
$z = \{e^{\frac{1}{4}i};\ e^{(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2})i};\ e^{(\frac{1}{4}+\pi)i};\ e^{(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\pi)i}\}$

f) $z = e^{2+\pi i} \iff -e^2 \approx -7{,}3891$

Tipp: $\sqrt{-3+4i} = 1+2i$.

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie mithilfe der Logarithmengesetze:

a) $\log(100) = 2$

b) $\mathrm{lb}(32) = 5$

c) $\frac{\ln(100)}{\ln(10)} = 2$

d) $\log(54d)-\log(0{,}54\mathrm{d}) = 2$

e) $\log(5x)+\log(2x) = 1+2\log(x)$

f) $\log_9(3)+\log_{81}(9) = 1$

Aufgabe 4.4 Bestimmen Sie das Taylorpolynom von $\cos(x)$ im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und beweisen Sie so, dass der Cosinus ein um 90° verschobener Sinus ist.

Es ist $\cos'(x) = -sin(x)$, $\cos''(x) = -cos(x)$, $\cos'''(x) = sin(x)$, $\cos^{(4)}(x) = cos(x)$, ...
Weiterhin ist $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Damit sind alle geraden Ableitungen an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ gleich 0 und die Ungeraden Ableitungen alternieren zwischen +1 und -1. Für das Taylorpolynom von $\cos(x)$ an der selben Stelle ergibt sich also:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^{(n)}(\frac{\pi}{2})}{n!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}$$

Für den Sinus an der Stelle π ergibt sich analog:
$\sin(\pi) = 0$, $\sin'(\pi) = \cos(\pi) = -1$, $\sin''(\pi) = -\sin(\pi) = 0$, $\sin'''(\pi) = -\cos(\pi) = 1$,
$\sin^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$, ... Damit ist

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}$$

Aufgabe 4.5 Berechnen Sie:

a) $\frac{d}{dx}e^{x^2} = e^{x^2}\cdot 2x$

b) $\frac{d}{dx}\ln(\tan(x)), \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$
$= \mathrm{cotan}(x)+\tan(x)$

c) $\int(n+1)\cos(x)^n\cdot\sin(x)dx$
$= \cos(x)^{n+1}$