# Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## Sommersemester 2014 - Übungsblatt 3

### Aufgabe 3.1 „Knacken" Sie folgende Integrale

a) $\int 10x^4 + 4x^3 dx \;=\; 2x^5 + x^4 + C$

b) $\int 8x^3 - 12x^2 - 10x + 5dx \;=\; 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 5x + C$

c) $\int 360 \cdot \cos(3x)dx \;=\; 120\sin(3x)$

d) $\int_{x=0}^{\pi} x^2\cos(x)dx \;=\; \Big[(x^2-2)\sin(x) + 2\cos(x)\Big]_{x=0}^{\pi} \;=\; -2\pi$

e) $\int \sin(x)\cos(x)dx \;=\; \frac{1}{2}\sin(x)^2 + C \;=\; -\frac{1}{2}\cos(x)^2 + C$

f) $\int_{x=0}^{\sqrt[3]{2,5}} x^2\sqrt{2x^3+4}dx \;=\; \frac{1}{9}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=4}^{9} \;=\; \frac{19}{9}$

g) $\int_{x=1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{7-3x}} \;=\; -\frac{1}{6}\left[\sqrt{7-3x}\right]_{x=1}^{2} \;=\; \frac{1}{6}$

h) $\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} dydx \;=\; ab$

i) $\int_{n=1}^{2}\int_{u=2}^{4} n(1+u)dudn \;=\; 12$

### Aufgabe 3.2 Zeigen Sie: Das gegebene Integral hat für kein $\alpha \in (0,\infty)$ eine Lösung

$$\int_{x=0}^{\infty} f_\alpha(x)dx \;=\; \int_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$$

Betrachten wir zunächst den Fall $\alpha = 1$:
Dann ist das Integral ausführt: $F_1(x) = \ln(x)$ Der $\ln(x)$ geht für $x \to 0$ gegen $-\infty$ und für $x \to \infty$ gegen $+\infty$. Damit kann das Integral für $\alpha = 1$ keine Lösung haben.

Ist $0 < \alpha < 1$, so wird die Stammfunktion $F_\alpha(x) = \frac{-1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Dann ist die Potenz von $x$ negativ. Damit ist $F_\alpha(0) = 0$, aber für $x \to \infty$ geht $x^{\alpha-1} \to 0$ und $\frac{1}{x^{\alpha-1}} \to \infty$ und das Integral hat ebenfalls keine Lösung.

Es bleibt als letztes der Fall $\alpha > 1$ zu diskutieren:
Hier ist die Stammfunktion ebenfalls $F_\alpha(x) = \frac{-1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Jetzt ist aber die Potenz von $x$ positiv. Damit ist $\lim_{x\to\infty}(F_\alpha(x)) = 0$ und $\lim_{x\to 0}(F_\alpha(x)) = \infty$, sodass das Integral ebenfalls keine Lösung besitzt.

Zusammenfassend hat das Integral für keinen der Werte $\alpha > 0$ eine Lösung was mit der Behauptung aus der Aufgabenstellung äquivalent ist.