Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1 Berechnen Sie folgende Ableitungen nach x

a) $\frac{d}{dx}(x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3) = 5x^4 - 4x^3 + x^2$

b) $\frac{d}{dx}(x \cdot [\ln(x) - 1])' = \ln(x)$

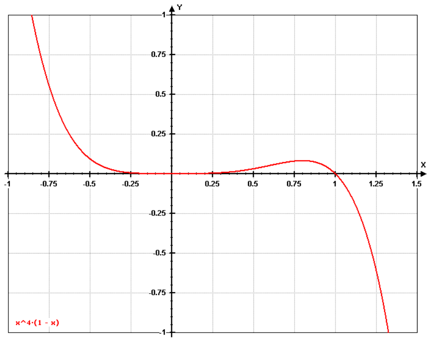
c) $\frac{d}{dx}(\frac{a+bx}{c+dx}) = \frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$

d) $\frac{d}{dx}(\sin(x^n)\cos(x)) = nx^{n-1}\cos(x^n)\cos(x) - \sin(x^n)\sin(x)$

Aufgabe 2.2 Diskutieren und zeichnen Sie die angegebene Funktion

$$f(x) = x^4 \cdot (1 - x)$$

Nullstellen: $x = 0 \lor x = 1$
Extrema: Tiefpunkt (0|0); Hochpunkt (0,8|0,08192)
Wendepunkte: WP (0,6|0,05184)



Aufgabe 2.3 Es soll ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b in den Einheitskreis passen.

Bestimmen Sie a und b so, dass der Flächeninhalt $F = a \cdot b$ maximal wird.
Es ist $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 2.4 Entwickeln Sie die Taylorreihe der folgenden beiden Funktionen bis zum einschließlich 2. Taylorpolynom (3 Glieder)

a) $f(x) = \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$

b) $f(x) = \ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$

Aufgabe 2.5 Berechnen Sie den Nullpunkt Ihres Taylorpolynoms aus Aufgabe 2.4.a)

Wie weit liegt dieser von tatsächlichen Nullpunkt entfernt?
Der Nullpunkt der Taylorreihe liegt bei $x = 1{,}46$ und ist damit 0,46 vom realen Nullpunkt $x = 1$ entfernt

Aufgabe 2.6 Berechnen Sie mithilfe der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^\alpha}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2.7 Beweisen Sie die Summenregel der Ableitung

$$\frac{d}{dt}(z(t) \pm y(t)) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{z(t+h) \pm y(t+h) - z(t) \mp y(t)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{z(t+h)-z(t)}{h} \pm \frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{z(t+h)-z(t)}{h}\right) \pm \lim_{h\to 0}\left(\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right) = \frac{d}{dt}z(t) \pm \frac{d}{dt}y(t)$$