Lösungsblatt 9
zur Experimentalphysik I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1 Steinzeitkarussell (Präsenzaufgabe)

Die Steinzeitmenschen Urk und Ark wollen aus einer kreisrunden Steinplatte der Masse M zwei Karussells bauen und streiten sich um die Platte. Schließlich bricht diese in der Mitte entzwei und jeder baut mit seiner Hälfte ein Karussell. Urk wählt als Drehpunkt den ursprünglichen Mittelpunkt der Platte während Ark den Schwerpunkt seiner Hälfte als Drehpunkt wählt. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der beiden Karussells. Warum sind diese unterschiedlich?

Urks halbe Scheibe hat die halbe Masse und das halbe Massenträgheitsmoment einer ganzen Scheibe, also ist $I_{\text{Urk}} = \frac{1}{2}mR^2$, wenn m die Masse der halben Scheibe ist. Aks Trägheitsmoment lässt sich mit dem Steinerschen Satz berechnen. Hierfür benötigen wir zunächst die Position des Schwerpunktes:

$$s_y = \frac{\int_V \rho\, y\, \mathrm{d}V}{\int_V \rho\, \mathrm{d}V} = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{\phi=\pi}^{0}\int_{z=0}^{z} r\cdot\sin(\phi) r\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}r}{\frac{\pi}{2}R^2 z} = \frac{4}{3\pi}R = 0{,}4244R \quad \Rightarrow$$

$$I_{\text{Ark}} = I_{\text{Urk}} - ml^2 = \frac{1}{2}mR^2 - m\left(\frac{4}{3\pi}R\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mR^2 = 0{,}3199mR^2$$

Ark hat eine niedrigeres Trägheitsmoment, weil sich bei der Wahl seiner Achse die Masse im Schnitt deutlich näher am Schwerpunkt befindet.

Aufgabe 9.2 Rasensprenger (Präsenzaufgabe)

Onkel Gustav möchte seinen Rasen sprengen. Er kauft sich das Modell “Rundum” in einer bekannten Baumarktkette. Dieser besteht aus einem um eine Vertikale Achse drehbaren Rad mit einen Durchmesser von d = 20 cm und einen Massenträgheitsmoment von I = 0,06 kg m^2. Entlang des Rades sind mehrere Düsen angeordnet. Bei Gustavs Wasserdruck verteilt der Rasensprenger 0,2 Liter Wasser pro Sekunde mit einer vertikalen Geschwindigkeit von $v = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) Welche Drehzahl (Umdrehungen pro Sekunde) erreicht der Rasensprenger 5 Sekunden nach dem Anstellen, wenn Reibung vernachlässigt werden kann?

$$\omega_{\text{Rundum}} = \int \alpha\, \mathrm{d}t = \alpha t = \tau\frac{t}{I} = \frac{d}{2}\frac{M}{t}v\cdot\frac{t}{I} = \frac{0{,}2\ \text{m}}{2} 0{,}2\frac{kg}{s} 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{5\ \text{s}}{0{,}06\ \text{km m}^2} = 25\ \frac{1}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad f = 3{,}979\ \text{Hz}$$

b) Welche Drehzahl erreicht das Modell “Gartenschleuder” unter gleichen Voraussetzungen? Im Unterschied zum Modell “Rundum” besteht dieses Modell aus einem Stab, an dem die Düsen gleichmäßig von der Mitte bis zum Rand entgegen der Laufrichtung angeordnet sind.

Hier verteilt sich das Drehmoment auf die komplette Achse: $\tau = \int_{r=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} r\cdot\frac{\Delta M}{d\cdot\Delta t}\,\mathrm{d}r = \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{M}{dt} = \frac{M\cdot d}{4t} \quad \Rightarrow$

$$\omega_{\text{Gartenschleuder}} = \frac{d}{4}\frac{M}{t}v\cdot\frac{t}{I} = \frac{1}{2}\omega_{\text{Rundum}} = 12{,}5\ \frac{1}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad f = 1{,}989\ \text{Hz}$$

Aufgabe 9.3 Wichtige Trägheitsmomente e) bis j) (6 Punkte)

e) Eines Quaders mit den Seitenlängen $2A$, $2B$ und $2C$ und Drehachse durch den Mittelpunkt und der Richtung, in welcher der Quader die Dicke $2C$ hat.

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}V = \rho \cdot \int_{x=-A}^{A} \int_{y=-B}^{B} \int_{z=-C}^{C} x^2+y^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\rho ABC \left(A^2+B^2\right) = \frac{1}{3}M\left(A^2+B^2\right)$$

f) Eines Würfels mit Kantenlänge $2A$ und Drehachse durch den Mittelpunkt

Mit $A = B = C$ folgt aus der letzten Aufgabe $I = \frac{2}{3}MA^2$.

g) Eines dünnen Bretts mit Breite $2b$ und Drehachse durch den Mittelpunkt

Mit $A = 0$ folgt aus Aufgabe e) $I = \frac{1}{3}Mb^2$

h) Eines dünnen Bretts mit Breite $2b$ und Drehachse durch den Rand

Mit dem Steinerschen Satz gilt $I = \frac{1}{3}Mb^2 + Mb^2 = \frac{4}{3}Mb^2$

i) Eines Hohlzylinders mit Radien R_1 und R_2 und Drehachse senkrecht zur Zylinderachse durch den Mittelpunkt

$$I = \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \cdot \left(z^2 + (R\sin(\varphi))^2\right) \cdot r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \rho \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r +$$

$$\rho \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r^3 \sin(\varphi)^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{12}\left({R_2}^2-{R_1}^2\right)h^3 + \pi\frac{\rho}{4}\left({R_2}^4-{R_1}^4\right)h = M\left(\frac{h^2}{12}+\frac{1}{4}\cdot\frac{{R_2}^4-{R_1}^4}{{R_2}^2-{R_1}^2}\right) =$$

$$M\left(\frac{h^2}{12}+\frac{{R_2}^2+{R_1}^2}{4}\right)$$

j) Eines Vollzylinders mit Radius R und Drehachse senkrecht zur Zylinderachse durch den Mittelpunkt

Aus der letzten Aufgabe ergibt sich mit $R_1 = 0$: $I = M\left(\frac{h^2}{12}+\frac{R^2}{4}\right)$

Aufgabe 9.4 Max und Moritz geben ein Feuerwerk. (4 Punkte)

Max und Moritz haben von ihrer Erforschung der Atmosphäre noch einige “klassische” Antriebe mit Schwarzpulver übrig. Zur Erinnerung: Dieses hat eine Austrittsgeschwindigkeit von 500 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Rakete wiegt 900 g. Die Treibladung beträgt ebenfalls 900 g und brennt in 1 Sekunde gleichmäßig ab. Max und Moritz befestigen vier dieser Antriebe an einem alten Fahrradreifen mit einem Durchmesser von 66 cm und einem Gewicht von 4 kg.

a) Stellen Sie mithilfe ihrer Kenntnisse über Raketen und Drehungen eine Differentialgleichung für die Rotationsgeschwindigkeit des Fahrradreifens auf. Reibung ist vernachlässigbar. Sie dürfen annehmen, dass sich die komplette Masse des Fahrradreifens außen befindet.

   Da sich die komplette Masse auf Radius R befindet, gilt für das Trägheitsmoment $I(t) = M(t)R^2 = M_0 - M_{\text{Pulver}} \cdot \frac{t}{t_{\text{Brenn}}})$, wobei $M_0 = 11{,}2$ kg die Masse des Fahrradreifens und der Raketen mit Pulver ist. Es gilt weiterhin:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha = \frac{\tau}{I(t)} = \frac{Rv\frac{M_{\text{Brenn}}}{T_{\text{Brenn}}}}{\left(M_0 - M_{\text{Brenn}}\frac{t}{T_{\text{Brenn}}}\right)R^2} = \frac{vM_{\text{Brenn}}}{\left(M_0 T_{\text{Brenn}} - M_{\text{Brenn}}t\right)R}$$

b) Lösen Sie diese Differentialgleichung. Welche Enddrehzahl und kinetische Energie erreicht das Rad, wenn es bei der Zündung der Raketen still steht?

   Trennung der Variablen liefert:

$$\omega = \int_{from} \frac{vM_{\text{Brenn}}}{\left(M_0 t_{\text{Brenn}} - M_{\text{Brenn}}t\right)R}\,\mathrm{d}t = -\left(\ln(M_0 t_{\text{Brenn}} - M_{\text{Brenn}}t) + C\right)\cdot\frac{v}{R} = 0 \quad \text{für} \quad t = 0 \quad \Rightarrow$$

$$C = \ln\left(M_0 t_{\text{Brenn}}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{R}\ln\left(\frac{M_0 t_{\text{Brenn}}}{M_0 t_{\text{Brenn}} - M_{\text{Brenn}}t}\right) = -\frac{v}{R}\ln\left(1 - \frac{M_{\text{Brenn}}t}{M_0 t_{\text{Brenn}}}\right) =$$

$$-\frac{500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}33\text{ m}}\ln\left(1 - \frac{4\cdot 0{,}9\text{ kg}\cdot t_{\text{Brenn}}}{11{,}2\text{ kg}\cdot t_{\text{Brenn}}}\right) = 587{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}} \quad \Leftrightarrow \quad F_{\text{Ende}} = 93{,}51\text{ Hz}$$

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(M_{\text{Reifen}} + 4M_{\text{Rakete}}\right)R^2\omega^2 = \frac{1}{2}(4\text{ kg} + 4\cdot 0{,}9\text{ kg})\cdot(0{,}33\text{ m})^2\cdot\left(587{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 = 142{,}8\text{ kJ}$$

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔

Aufgabe 9.5 Rotationsenergie der Sonne (8 Punkte)

Letzte Woche haben Sie die Rotationsenergie der Erde berechnet. Berechnen Sie nun die Rotationsenergie der Sonne. Im Gegensatz zur Erde besteht die Sonne nicht aus einem festen Material konstanter Dichte, sondern aus Gas. Dessen Dichte ist abhängig vom Radius und beträgt

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot e^{-20\cdot\left(\frac{r}{R_0}\right)^2}$$

a) Berechnen Sie die Zentrale Dichte ρ_0 der Sonne mithilfe des Radius $R_0 = 1\,392\,684$ km und der Masse $M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg.

$$M_\odot = \int \rho \, \mathrm{d}V = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0 e^{-20\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} r^2 \sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 \int_{r=0}^{\infty} r^2 \cdot e^{-\left(\frac{\sqrt{20}}{r_0}\right)^2 r^2}\,\mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{20}}{r_0}\right)^3} =$$

$$2\pi\rho_0 \cdot \left(\frac{r_0}{\sqrt{20}}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{20}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \rho_0 {r_0}^3 \Leftrightarrow \rho_0 = \left(\frac{20}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{M_\odot}{{r_0}^3} = 16{,}06 \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\text{ kg}}{(6{,}963 \cdot 10^8\text{ m})^3} =$$

$$94\,622\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

b) Berechnen Sie nun das Trägheitsmoment $I_\odot$ in Abhängigkeit der Masse und des Radius der Sonne.

$$I = \int \rho\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0 e^{-20\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}\left(x^2+y^2\right) r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r =$$

$$\int_{r=0}^{\infty}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0 e^{-20\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}\left(r^2\sin(\vartheta)^2\cos(\varphi)^2 + r^2\sin(\vartheta)^2\sin(\varphi)^2\right) r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r =$$

$$\rho_0 \int_{r=0}^{\infty} e^{-20\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} r^4\,\mathrm{d}r \int_{\vartheta=0}^{\pi}\sin(\vartheta)^3\,\mathrm{d}\vartheta \int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 4\pi\rho_0\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{20}}{r_0}\right)^5} = 2\pi\rho_0\left(\frac{r_0}{\sqrt{20}}\right)^5 \cdot \frac{3}{2}\cdot 12 \cdot \sqrt{\pi} =$$

$$2\pi\left(\frac{20}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{M_\odot}{{r_0}^3}\left(\frac{r_0}{\sqrt{20}}\right)^5 \cdot \frac{3}{2}\cdot 12\cdot\sqrt{\pi} = \frac{1}{20} M_\odot {r_0}^2$$

c) Berechnen Sie nun aus den Angaben in der Aufgabe eine konkrete Zahl für das Trägheitsmoment der Sonne.

$$M_\odot = \frac{1}{20} M_\odot {r_0}^2 = \frac{1}{20} 1{,}989 \cdot 10^{30}\text{ kg} \cdot \left(6{,}963 \cdot 10^8\text{ m}\right)^2 = 4{,}822 \cdot 10^{46}\text{ kg m}^2$$

d) Berechnen Sie die Rotationsenergie der Sonne mit $T_\odot = 25{,}38$ Tage und vergleichen Sie Ihren Wert mit der Rotationsenergie der Erde.

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 = 2\pi^2 \frac{I}{T^2} = 2\pi^2 \frac{4{,}822 \cdot 10^{46}\text{ kg m}}{(25{,}38 \cdot 86400\text{ s})^2} = 7{,}923 \cdot 10^{35}\text{ J} \gg 2{,}458 \cdot 10^{29}\text{ J} = E_{\text{Rotation Erde}}$$

Tipp: $\int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-a^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{n+1}}$ mit der Gamma Funktion:

$\Gamma(x) = (x-1)!$ für $x \in \mathbb{N}$, $\Gamma(1{,}5) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(0{,}5) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)\ \forall\ x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.