Lösungsblatt 8 zur Experimentalphysik I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 Leopolds Litfaßsäule (Präsenzaufgabe)

Der Künstler Leopold Müßig möchte für sein neustes Projekt zwei drehbare Litfaßsäulen aus Beton ($\rho_{\text{Beton}} \approx 2{,}4\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) gießen, die das gleiche Gewicht und den gleichen Radius (0,5 m) aber unterschiedliche Trägheitsmomente haben sollen. Eine Säule wird als Vollzylinder ausgeführt, die zweite als Hohlzylinder. Das Verhältnis der Trägheitsmomente soll exakt dem goldenen Schnitt $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$ entsprechen. Wie dick muss der Hohlzylinder sein?

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2}M\left({R_i}^2 + {R_a}^2\right)}{\frac{1}{2}M{R_a}^2} = \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^2 + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad R_i = R_a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 0{,}7862 \cdot 0{,}5\ \text{m} = 0{,}3931\ \text{m}$$

Aufgabe 8.2 Zeigen Sie mithilfe der Definition des Massenträgheitsmoments: (Präsenzaufgabe)

Wenn Sie zwei Gegenstände mit den Massenträgheitsmomenten I_1 und I_2 haben, die um eine Identische Achse rotieren, hat das Gesamtsystem das Massenträgheitsmoment $I = I_1 + I_2$.

Im allgemeinen kann man sich die beiden Gegenstände als Massenverteilungen $\rho_1(\vec{x})$ und $\rho_2(\vec{x})$ vorstellen, die außerhalb der Gegenstände 0 sind. Das Koordinatensystem sei so festgelegt, dass die Z-Achse die Rotationsachse ist. Nach Script gilt dann:

$$I_1 = \int x^2 + y^2 \mathrm{d}m_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_1(\vec{x})\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V \quad \text{und analog dazu} \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_2(\vec{x})\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V$$

Die Gesamtdichte ist die Addition der Dichte der einzelnen Gegenstände, sodass für das Gesamtträgheitsmoment gilt:

$$I_{\text{ges}} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{\text{ges}}(\vec{x})\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\rho_1(\vec{x}) + \rho_2(\vec{x})\right)\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_1(\vec{x})\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V + \int_{\mathbb{R}^3} \rho_2(\vec{x})\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V = I_1 + I_2 \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 8.3 Wichtige Trägheitsmomente a) bis d) (4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Hohlzylinders berechnet. Als Grenzfall konnten Sie daraus das Trägheitsmoment eines Vollzylinders herleiten. Leiten Sie analog dazu die Trägheitsmomente folgender homogener Körper mit der Masse M her:

a) Eines Vollkegels mit Breite $2B$ mit Rotationsachse gleich Kegelachse

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \rho\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V = \rho \int_{z=0}^{h} \int_{r=0}^{\frac{2B}{2}\cdot\frac{z}{h}} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \cdot r \cdot \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{10}\rho B^4 h = \frac{3}{10}B^2 M$$

b) Eines Vollellipsoids mit den Durchmessern $2a$, $2b$ und $2c$ wobei die Drehachse durch den Mittelpunkt und der Richtung verläuft, in welcher der Ellipsoid die Dicke $2c$ hat.

Mit dem gleichen Ansatz werden zunächst $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$ und $z' = \frac{z}{c}$ substituiert. Anschließend folgt Substitution in die Kugelkoordinaten und Integration:

$$I = \int_{z=-c}^{c} \int_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1} \int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1} \rho\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$\rho \cdot abc \cdot \int_{z=-1}^{1} \int_{y'^2+z'^2<1} \int_{x'^2+y'^2+z'^2<1} a^2x^2+b^2y^2 \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' =$$

$$\frac{3}{4\pi}\frac{4\pi}{3} \cdot \rho \cdot abc \cdot \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(a^2\cos(\varphi)^2 + b^2\sin(\varphi)^2\right) r^4 \sin(\vartheta)^3 \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$\frac{3}{4\pi}M \cdot \int_{r=0}^{1} r^4\,\mathrm{d}r \int_{\varphi=0}^{2\pi} a^2\cos(\phi)^2 + b^2\sin(\phi)^2\,\mathrm{d}\varphi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin(\vartheta)^3\,\mathrm{d}\vartheta = M\frac{a^2+b^2}{5}$$

c) Einer Vollkugel mit Radius R und Drehachse durch den Mittelpunkt

Mit $a = b = R$ folgt aus der letzten Aufgabe: $I = M\frac{R^2+R^2}{5} = \frac{2}{5}MR^2$

d) Einer Hohlkugel mit Radien R_1 und R_2 und Drehachse durch den Mittelpunkt

$$I = I_{\text{voll}} - I_{\text{hohl}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho {R_2}^3 \cdot {R_2}^2 - \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho {R_1}^3 \cdot {R_1}^2 = \frac{2}{5}M\frac{{R_2}^5-{R_1}^5}{{R_2}^3-{R_1}^3}$$

Diese werden Sie z.T. bei den folgenden Aufgaben benötigen. Es empfiehlt sich auch, die Ergebnisse in der eigenen Formelsammlung zu notieren. Weitere Trägheitsmomente folgen nächste Woche.

Aufgabe 8.4 Rotationsenergie der Erde (1 Punkt)

Berechnen Sie die Rotationsenergie der Erde. Nehmen Sie dazu an, dass die Erde ein Ellipsoid mit $a = b = 12\,756$ km und $c = 12\,714$ km ist. Die Dichte soll homogen sein und einen Wert von $5\,515\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ haben.

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{16}{15}\pi^3\frac{a^4c}{T^2}\rho = \frac{16}{15}\pi^3\frac{(6\,378\,000\text{ m})^4 \cdot 6\,357\,000\text{ m}}{(86\,164\text{ s})^2} \cdot 5515\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 2{,}584 \cdot 10^{29}\text{ J}$$

Dies ist mehr als das 500 Millionenfache des Weltenergiebedarfs 2010.
(Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Weltenergiebedarf)

Übungsblatt 8 zur Experimentalphysik I

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ________

Aufgabe 8.5 Blasmusik mit Ulli (5 Punkte)

Ulli hört sich eine Platte mit Blasmusik an. Diese hat einen Durchmesser von 25 cm, ein Gewicht von 200 g und wird mit 45 Umdrehungen pro Minute abgespielt. Die Unterlage hat einen Durchmesser von 27 cm und ein Gewicht von 800 g.

a) Berechnen Sie Trägheitsmoment und Rotationsenergie der Platte.

$$I_1 = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}2\text{ kg}\cdot(0{,}125\text{ m})^2 = 1{,}5625\cdot 10^{-3}\text{ kg m}^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2}I\omega^2 = 2\pi^2 I n^2 = 2\pi^2\cdot 1{,}5625\cdot 10^{-3}\text{ kg m}^2\cdot\left(\frac{45}{60}\,\frac{1}{\text{s}}\right)^2 = 17{,}35\text{ mJ}$$

b) Wiederholen Sie die Berechnung aus Aufgabe a) für die Unterlage sowie für beides Zusammen.

$$I_2 = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}8\text{ kg}\cdot(0{,}135\text{ m})^2 = 7{,}29\cdot 10^{-3}\text{ kg m}^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = 2\pi^2 I n^2 = 2\pi^2\cdot 7{,}29\cdot 10^{-3}\text{ kg m}^2\cdot\left(\frac{45}{60}\,\frac{1}{\text{s}}\right)^2 = 80{,}94\text{ mJ}$$

Und natürlich sind $I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 = 8{,}8525\cdot 10^{-3}\text{ kg m}^2$ und $E_{\text{ges}} = E_1 + E_2 = 98{,}29\text{ mJ}$.

c) Wenn Ulli den Plattenspieler einschaltet, beschleunigt er in 3 Sekunden gleichmäßig auf seine volle Geschwindigkeit. Welche Leistung benötigt der Plattenspieler dafür? Zeichnen Sie die Funktion in Abhängigkeit von der Zeit!

$$P(t) = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}2\pi^2\left(I_1+I_2\right)\cdot n(t)^2 = 2\pi^2\left(I_1+I_2\right)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta n\cdot\frac{t}{\Delta t}\right)^2 = 2E_{\text{ges}}\cdot\frac{t}{\Delta t^2} = 2\cdot\frac{98{,}29\text{ mJ}}{3\text{ s}}\cdot\frac{t}{\Delta t}$$

$$= 65{,}53\text{ mW}\cdot\frac{t}{\Delta t}$$

d) Sebastian konnte Ullis “Dicke-Backen-Musik” noch nie leiden. Deswegen zieht er den Stecker raus und setzt einen Kugelförmigen Stein mit einem Durchmesser von 15 cm und einer Dichte von 2 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ auf die Mitte der Platte. Berechnen Sie jetzt das Trägheitsmoment des Systems und dessen Rotationsgeschwindigkeit unter der Annahme, dass dem System weder Energie zugeführt noch abgezogen wird.

$$I_{\text{neu}} = I_{\text{ges}} + I_{\text{Stein}} = I_{\text{ges}} + \frac{8}{15}\pi\rho r^5 = I_{\text{ges}} + \frac{1}{60}\pi\rho d^5 = 8{,}8525\cdot 10^{-3}\text{ kg m}^2 + \frac{1}{60}\cdot\pi\cdot 2000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot(0{,}15m)^5$$

$$= 16{,}80\cdot 10^{-3}\text{ kg m}^2$$

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2}I_{\text{neu}}{\omega_{\text{neu}}}^2 \quad\Leftrightarrow\quad \omega_{\text{neu}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{ges}}}{I_{\text{neu}}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 98{,}29\text{ mJ}}{16{,}80\cdot 10^{-3}\text{ kg m}^2}} = 0{,}5444\text{ Hz} = 32{,}67\,\frac{1}{\text{min}}$$

Übungsblatt 8 zur Experimentalphysik I

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐

Aufgabe 8.6 Tim hat einen dünnen Stab der Länge L. (5 Punkte)

Dessen Dichte (in diesem Fall: Masse pro Längeneinheit) steigt linear von λ_0 auf $2\lambda_0$ an.

a) Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes.

$$s = \frac{\int_{x=0}^{L} x \cdot \lambda(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{x=0}^{L} \lambda(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\lambda_0 \int_{x=0}^{L} x \cdot \left(1+\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x}{\lambda_0 \int_{x=0}^{L} \left(1+\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{3}L^2}{L+\frac{1}{2}L} = \frac{5}{9}L$$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Stabes mit einer Rotationsachse senkrecht zum Stab durch den Schwerpunkt.

$$I_M = \int_{x=0}^{L} \lambda(x-s)^2\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{L} \left(1+\frac{x}{L}\right)\lambda_0\left(x-\frac{5}{9}L\right)^2\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{L} \frac{x^3}{L} - \frac{1}{9}x^2 - \frac{65}{81}xL + \frac{25}{81}L^2\,\mathrm{d}x = \frac{13}{108}\lambda_0 L^3$$

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Stabes miteiner Rotationsachse senkrecht zum Stab am linken und rechten Ende des Stabes.

$$I_L = \int_{x=0}^{L} \lambda(x)x^2\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{L} \left(1+\frac{x}{L}\right)\lambda_0 \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \lambda_0 \int_{x=0}^{L} \frac{x^3}{L} + x^2\,\mathrm{d}x = \frac{7}{12}\lambda_0 L^3$$

$$I_R = \int_{x=0}^{L} \lambda(x)(L-x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{L} \left(1+\frac{x}{L}\right)\lambda_0 \cdot (L-x)^2\,\mathrm{d}x = \lambda_0 \int_{x=0}^{L} \frac{x^3}{L} - x^2 - xL + L^2\,\mathrm{d}x = \frac{5}{12}\lambda_0 L^3$$

Aufgabe 8.7 Energiespeicher (5 Punkte)

Horst hat einen Generator auf dem Schrottplatz gefunden. Zusammen mit Udo und Ihnen gründet er eine GmbH mit der Mindesteinlage von 12 500 €. Von diesem Geld sollen Rotationskörper aus Stahl für 500 €die Tonne gekauft werden. Ein guter Stahl aus dem Stahlwerk Ihres Vertrauens besitzt eine Streckgrenze von 350 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ und eine Dichte von 7,85 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Mithilfe dieser Rotationskörper soll elektrische erneuerbare Energie gespeichert werden. Wie viel Energie können Sie speichern?

a) Bevor Sie die Aufgabe lösen, überlegen Sie, welche Form hierfür am besten geeignet sein könnte.

An dieser Stelle gibt es einen Punkt egal welche Form Sie gewählt haben, solange Sie Ihre Wahl begründen können. Man könnte z.B. argumentieren, dass ein großer Hohlzylinder am besten ist, weil dieser im Verhältnis zur Masse das größte Trägheitsmoment von allen Formen besitzt, die wir bisher berechnet haben.

b) Stellen Sie sich einen unendlich dünnen Zylinder aus Stahl vor und berechnen Sie zunächst die Streckkraft pro Fläche dA, die aufgrund der Rotation (bei konstanter Rotationsgeschwindigkeit ω) wirkt. Denken Sie dabei an die Definition der Energie: $F = \frac{\partial E(r)}{\partial x(r)}$ Die Erdanziehung kann vernachlässigt werden. Lösen Sie anschließend die Formel, die Sie oben erhalten nach der Energiedichte (Energie pro Volumen) auf.

$$F = \frac{\partial E(r)}{\partial x(r)} = \frac{\partial \frac{1}{2}I\omega^2}{\partial 2\pi r} = \frac{1}{4\pi}M\omega^2\frac{\partial r^2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}M\omega^2 r = \frac{E}{2\pi r} = \frac{E}{2\pi r \cdot \mathrm{d}A}\cdot \mathrm{d}A = \frac{E}{\mathrm{d}V}\,\mathrm{d}A \Leftrightarrow \frac{F}{A} = \frac{E}{V}$$

c) Unterstützt Ihr Ergebnis die Vermutung Ihrer Form aus Aufgabe a)? Falls nicht, wählen Sie eine optimale Form.

In der Formel sieht es zunächst so aus, als wäre die Form des Körpers egal, da die Energiedichte konstant ist. Dies gilt aber nur, wenn für jeden Radius eine andere Rotationsgeschwindigkeit ω gewählt wird. Das ist für einen festen Körper natürlich nicht möglich. Am besten ist daher ein Körper geeignet, bei dem die komplette Masse auf einem Radius liegt, also z.B. ein Hohlzylinder. Die Dimensionierung spielt aber keine Rolle, was mich selbst auch überrascht hat.

d) Wie viel Energie können Sie nun speichern?

$$E = V \cdot \frac{F}{A} = \frac{M}{\rho} \cdot \frac{F}{A} = \frac{25\,000\ \mathrm{kg}}{7850\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \cdot 350\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = 1{,}115\ \mathrm{GJ} = 309{,}6\ \mathrm{kWh}$$

e) Schätzen Sie grob ab, ob der Energiespeicher wirtschaftlich rentabel ist oder ob Sie doch besser mit der Firmenkasse durch brennen.

Unter der Annahme, dass Sie als Reingewinn 2 Cent pro gespeicherter kWh verbuchen können und Ihren Speicher jede Nacht komplett voll laden und am Tag komplett entleeren (und der Generator, den Horst gefunden hat eine Effizienz von 100% hat) können Sie mit einem jährlichen Gewinn von $309{,}6\ \mathrm{kWh} \cdot 2\ \frac{\mathrm{cent}}{\mathrm{kWh}} \cdot 1\ \frac{\mathrm{Ladung}}{\mathrm{Tag}} \cdot 365\ \frac{\mathrm{Tage}}{\mathrm{Jahr}} = 2260\ \frac{€}{\mathrm{Jahr}}$ rechnen. Gemessen am investierten Kapital entspricht dies einer Rendite von 18% $\Rightarrow$ Es lohnt sich.