Lösungsblatt 5
zur Experimentalphysik I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 Udos Achterbahn (Präsenzaufgabe)

Udo möchte eine Achterbahn mit einem Looping der Höhe h bauen. Aus welcher Höhe h_0 muss er seine Bahn mindestens starten lassen, damit sie nicht herunterfällt?

Oben im Looping gilt: $F_G = F_{ZP} \Leftrightarrow m \cdot g = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{1}{2} gh$. Andererseits ist: $E_{pot} + E_{kin} = E_{pot,0} \Rightarrow mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgh_0 \Leftrightarrow h_0 = \frac{gh+\frac{1}{2}v^2}{g} = \frac{5}{4}h$

Aufgabe 5.2 Candices krasse Kresse (Präsenzaufgabe)

Candice möchte Kresse in Blumentöpfe sähen. Die Blumentöpfe haben eine zylindrischen Form mit einem Außendurchmesser von 20 cm und einer Höhe von 20 cm. Ein leerer Blumentopf wiegt 0,5 kg und fasst bis zum Rand gefüllt 5 Liter Erde. Die Erde hat eine Dichte von 1 $\frac{\text{kg}}{\text{l}}$. Da das Gewicht des Bodens vernachlässigbar ist, ist der Schwerpunkt des Blumentopfs in der Mitte, wenn dieser komplett leer oder komplett gefüllt ist.

a) Wie viel Erde muss Candice einfüllen, damit der Schwerpunkt möglichst niedrig und der Blumentopf möglichst stabil steht?

Da sowohl Blumentopf als auch Erde in der Höhe homogen verteilt sind, gilt für die Lage der Schwerpunkte $s_B = \frac{1}{2}h_B$ und $s_E = \frac{1}{2}h_E$. Damit errechnet sich der Gesamtschwerpunkt nach dem Script zu: $s = \frac{1}{2}\frac{m_E h_E + m_B h_B}{m_E + m_B}$. Die Masse der Erde lässt sich in Abhängigkeit der Masse eines komplett gefüllten Blumentopfs schreiben:

$$m_E = m_{E,\text{voll}} \cdot \frac{h_E}{h_B} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}\frac{m_{E,\text{voll}} {h_E}^2 - m_B {h_B}^2}{m_{E,\text{voll}} h_E + m_B h_B}$$

Da wir das Minimum suchen, bilden wir die Ableitung nach der Quotientenregel und setzen diese gleich 0:

$$\frac{\partial S}{\partial h_E} = \frac{\left(m_{E,\text{voll}} h_E + m_B h_B\right)^2 \cdot 2 m_{E,\text{voll}} h_E - \left(m_{E,\text{voll}} {h_E}^2 - m_B {h_B}^2\right) \cdot m_{E,\text{voll}}}{2\left(m_{E,\text{voll}} h_E + m_B h_B\right)^2} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$h_E = h_B \cdot \frac{m_B}{m_{E,\text{voll}}}\left(\sqrt{\frac{m_{E,\text{voll}}}{m_B} + 1} - 1\right) = 20\text{ cm} \cdot \frac{0{,}5\text{ kg}}{5\text{ kg}}\left(\sqrt{\frac{5\text{ kg}}{0{,}5\text{ kg}} + 1} - 1\right) = 4{,}633\text{ cm}$$

b) Wie viel Energie würde man benötigen um ihn um zu schmeißen?

$$s = \frac{1}{2}\frac{h_B \frac{m_B}{m_{E,\text{voll}}}\left(\sqrt{\frac{m_{E,\text{voll}}}{m_B} + 1} - 1\right)^2 + h_B}{\sqrt{\frac{m_{E,\text{voll}}}{m_B} + 1}} = h_B \frac{m_B}{m_{E,\text{voll}}} \frac{\frac{m_{E,\text{voll}}}{m_B} + 1 - \sqrt{\frac{m_{E,\text{voll}}}{m_B} + 1}}{\sqrt{\frac{m_{E,\text{voll}}}{m_B} + 1}} = h_E$$

$$E = E_{\text{pot, kipp}} - E_{\text{pot}} = mgh_{\text{kipp}} - mgs = mg\left(\sqrt{s^2 + r^2} - r\right) = mgs\left(\sqrt{\left(\frac{r}{s}\right)^2 + 1} - r\right) =$$

$$\left(\frac{h_E}{h_B} m_{E,\text{voll}} + m_B\right) \cdot g \cdot h_E \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{r}{h_E}\right)^2 + 1} - r\right) \qquad \text{mit} \qquad m = m_E + m_B = \frac{h_E}{h_B} m_{E,\text{voll}} + m_B$$

Übungsblatt 5 zur Experimentalphysik I

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴

Aufgabe 5.3 Es werde Licht (3 Punkte

Gustav hat sich aus Teilen vom Schrottplatz einen Generator gebaut und an eine Wasserturbine angeschlossen. Die Wasserturbine wird aus einer 300 l Regentonne gespeist und entlässt das Wasser in eine zweite Regentonne, welche 1 m tiefer steht. Von dort kann Gustav mit seinem 10 l Eimer das Wasser wieder hoch füllen, um den Wasserpegel konstant zu halten. Die Apparatur hat eine Effizienz von 50 %.

a) Wie viele volle Eimer muss Gustav pro Minute in die obere Tonne gießen, wenn er eine 75 W Glühbirne betreiben will?

$$P = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon mgh = \varepsilon g h \rho \frac{V}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V}{t} = \frac{P}{\varepsilon g h \rho} = \frac{75\ \mathrm{W}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1\ \mathrm{m}\cdot 50\%\cdot 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = 900\ \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} \mathrel{\widehat{=}} 90\ \frac{\mathrm{Eimer}}{\mathrm{min}}$$

b) Wie viele Eimer müsste Gustav schleppen, wenn er die Glühbirne durch eine gleich helle 16 W Sparbirne ersetzt?

$19{,}2\ \frac{\mathrm{Eimer}}{\mathrm{min}}$

c) Wie viele Eimer müsste Gustav schleppen, wenn er die Glühbirne durch eine gleich helle 10 W LED-Lampe ersetzt?

$12\ \frac{\mathrm{Eimer}}{\mathrm{min}}$

Aufgabe 5.4 Eine Feder auf der ISS (2 Punkte)

Auf der ISS wird von einem dreiköpfigem Forscherteam folgendes Experiment durchgeführt:
Eine masselose Feder wird zusammengedrückt, sodass sie eine Energie E_f enthält. In diesem Zustand wird sie zwischen zwei Massen m_1 und m_2 gespannt und los gelassen. Die Feder entspannt sich und gibt ihre komplette Energie an die beiden Massen ab. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die Massen fort?

a) Berechnen Sie die Werte allgemein.

$$P_1 = P_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = v_2 \cdot \frac{m_2}{m_1}$$

$$E_1 + E_2 = E_{\mathrm{Feder}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m_1 {v_2}^2 \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + m_2 {v_2}^2 = E_{\mathrm{Feder}} \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{Feder}}}{m_2 + \frac{{m_2}^2}{m_1}}}, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{Feder}}}{m_1 + \frac{{m_1}^2}{m_2}}}$$

b) Nehmen Sie jetzt an m_1 sei eine Mikrowelle mit einem Gewicht von 5 kg und m_2 sei ein PC mit einem Gewicht von 10 kg. Weiterhin sei $E_f = 60$ J an.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\cdot 60\ \mathrm{J}}{5\ \mathrm{kg} + \frac{5\ \mathrm{kg}^2}{10\ \mathrm{kg}}}} = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2\cdot 60\ \mathrm{J}}{10\ \mathrm{kg} + \frac{10\ \mathrm{kg}^2}{5\ \mathrm{kg}}}} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Übungsblatt 5 zur Experimentalphysik I

Name, Vorname: ________________________ Matrikelnummer: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴

Aufgabe 5.5 Schlittschuh laufen für Anfänger (3 Punkte)

Erwin wiegt 60 kg und ist ein sehr unsicherer Schlittschuhläufer. Er läuft mit 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach Norden. Luca (80 kg) ist mit rasanten 5,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach Osten unterwegs. Abgelenkt von Samira (50 kg), die mit 3 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gen Westen unterwegs ist, stößt Luca mit Erwin zusammen. Aus Angst vor einem Sturz klammert sich Erwin an Luca fest.

a) Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich sich Erwin und Luca anschließend fort?

$$\left|\vec{v}_{\mathrm{nachher}}\right| = \left|\frac{\vec{P}_{\mathrm{ges}}}{m_{\mathrm{ges}}}\right| = \left|\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right| = \left|\begin{bmatrix}6/7\\22/7\end{bmatrix}\right| \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\sqrt{520}}{7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3{,}258\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) Mit welcher Geschwindigkeit und in welche Richtung würden sich Erwin und Luca bewegen, wenn sie elastisch frontal zusammen gestoßen wären?

Bei einem elastischen Stoß werden die Geschwindigkeiten der Stöße im Schwerpunktsystem invertiert. Die Aufgabe lässt sich daher lösen, indem man die Geschwindigkeiten ins Schwerpunktsystem transformiert, mit -1 mal nimmt und zurück transformiert. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems ist genau $\vec{v}_{\mathrm{nachher}}$ aus Aufgabe a):
Transformation ins Schwerpunktsystem: $\vec{v}_{s,1} = \vec{v}_1 - \vec{v}_s = \begin{bmatrix}8/7\\-22/7\end{bmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\quad \vec{v}_{s,2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_s = \begin{bmatrix}-6/7\\33/14\end{bmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Rücktransformation: $\vec{v}_{1,n} = -\vec{v}_{1,s} + \vec{v}_s = \begin{bmatrix}-2/7\\44/7\end{bmatrix} \quad \vec{v}_{2,n} = -\vec{v}_{2,s} + \vec{v}_s = \begin{bmatrix}12/7\\11/14\end{bmatrix} \quad \Rightarrow$
$\left|\vec{v}_{1,n}\right| = 6{,}292\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\quad \left|\vec{v}_{2,n}\right| = 1{,}886\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 5.6 Majora's Mask Teil II (10 Punkte)

Sie erinnern sich sicherlich noch an Aufgabe 2.6, in welcher Sie die Zeit berechnen sollten, bis der Mond aus dem Stand von seiner Umlaufbahn auf die Erde fällt. Damals hatten Sie mit einer, zugegebenermaßen nicht besonders tollen Näherung, von einer konstanten Beschleunigung von $a = g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gerechnet. Sie sind nun in der Lage diese Rechnung exakt durch zu führen und genau das sollen Sie auch machen.

Sie können diese Aufgabe entweder analytisch mit einer Rechnung per Hand oder numerisch mit Hilfe eines Computers lösen. Für die volle Punktzahl genügt eine richtige Lösung.

Gravitationskonstante:	$G =$	$6{,}673\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$	Abstand Erde / Mond:	$r_0 =$	384 400 km
Masse der Erde	$m_{\mathrm{E}} =$	$5{,}974\cdot 10^{24}$ kg	Radius der Erde	$r_{\mathrm{E}} =$	6 378 km
Masse des Mondes	$m_{\mathrm{M}} =$	$7{,}349\cdot 10^{22}$ kg	Radius des Mondes	$r_{\mathrm{M}} =$	1 738 km

Aufgabe 5.6.1 Analytische Variante

a) Verwenden Sie nun das Gravitationsgesetz um eine Differentialgleichung für die Beschleunigung $a(r) := \frac{d^2r}{dt^2}$ zu erstellen. Benutzen Sie dabei für die Masse der Erde die reduzierte Masse.

$$a(r) = \frac{F(r)}{\mu} = \frac{-G\frac{m_M m_E}{r^2}}{\frac{m_M m_E}{m_M+m_E}} = -G\cdot\frac{m_M+M_E}{r^2} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

b) Dies ist eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung und recht unschön zu lösen. Verwenden Sie Ihre Kenntnisse über die Energie, um Ihr Ergebnis aus Aufgabe a) in eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung mit $v(r) := \frac{dr}{dt}$ zu überführen.

$$E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{pot,\,0}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\mu u^2 - G\cdot\frac{m_M+M_E}{r^2} = G\cdot\frac{m_M+M_E}{{r_0}^2} \quad\Leftrightarrow\quad u = \frac{dr}{dt} = \sqrt{2G\left(m_M+m_E\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}$$

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔

c) Da die Differentialgleichung immer noch sehr schwierig ist, nähern Sie $r_0 \approx \infty$ im Integranten (nicht in den Grenzen!) und lösen Sie die daraus entstehende Differentialgleichung.

$$\frac{dr}{dt} \approx \sqrt{2G\left(m_M + m_E\right)\frac{1}{r}} \quad\Leftrightarrow\quad dt = \sqrt{\frac{r}{2G\left(m_M + m_E\right)}}dr \quad\Leftrightarrow\quad t = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{r^3}+C}{\sqrt{2G\left(m_M + m_E\right)}}$$

d) Was bedeutet das anschaulich? Ist die berechnete Zeit zu hoch oder zu niedrig?

Anschaulich wird die Geschwindigkeit so gesetzt, als würde der Mond aus dem Unendlichen fallen. Die genäherte Geschwindigkeit ist also zu hoch und damit wird die Zeit zu niedrig ausfallen.

e) Bestimmen Sie die Konstante C aus der Bedingung $t(r_0) := 0$.

Hier ergibt sich sofort $C = -\sqrt{{r_0}^3}$.

f) Berechnen Sie mithilfe der oben angegebenen Konstanten die Zeit, die der Mond benötigen würde.

$$t = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{{r_0}^3}-\sqrt{r^3}}{\sqrt{2G\left(m_M + m_E\right)}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{(6\,378\,000\ \mathrm{m} + 1\,738\,000\ \mathrm{m})^3}-\sqrt{(384\,400\,000\ \mathrm{m})^3}}{\sqrt{2\cdot 6{,}673\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}\left(7{,}349\cdot 10^{22}+5{,}947\cdot 10^{24}\right)\ \mathrm{kg}}} = 176\,314\ \mathrm{s} = 2\ \mathrm{d}\ 59\ \mathrm{m}$$

g) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis sowie den Aufwand der Rechnungen mit dem, das Sie in Aufgabe 2.6 ermittelt haben.

Der Aufwand für diese Berechnung ist deutlich höher als in Aufgabe 2.6, aber das Ergebnis ist um über eine Größenordnung näher an dem exakten Ergebnis aus der numerischen Rechnung von 416 146 s. Der restliche Unterschied von einem Faktor 2 ist der Näherung der Geschwindigkeit geschuldet.

Aufgabe 5.6.2 Numerische Variante

Für die Programmieraufgabe dürfen Sie eine Programmiersprache Ihrer Wahl verwenden. Achten Sie bitte darauf, dass das Programm bei der Abgabe lauffähig ist und ausreichend Kommentare enthält. Abgeben können Sie das Programm per E-Mail bei Ihrem Übungsgruppenleiter. Bitte legen Sie ebenfalls die Ausgabe und die Antworten auf die gestellten Fragen bei.

a) Erstellen Sie eine Funktion, welche die Beschleunigung $a(r) := \frac{d^2r}{dt^2}$ berechnet. Benutzen Sie dabei für die Masse der Erde die reduzierte Masse. Lassen Sie sich zur Kontrolle den Radius r und die Berechnete Beschleunigung a ausgeben. Testen Sie ihre Routine, indem Sie die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ reproduzieren.

b) Berechnen Sie nun aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit und Position des nächsten Schrittes. Erstellen Sie eine Schleife, die dies so lange iteriert, bis der Mond die Erde berührt.

c) Testen Sie Ihr Programm für verschiedene Schrittweiten und wählen Sie bitte begründet eine Schrittweite, die Ihnen sinnvoll erscheint.

d) Welche Einheit hat die Schrittweite?

e) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis sowie den Aufwand der Rechnungen mit dem, das Sie in Aufgabe 2.6 ermittelt haben.

Die Lösung dieser Variante in C ist in einer separaten Datei abrufbar.